Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **3** (2009) 70–76

УДК 519.854.2

Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и сетевая модель

Смирнов А.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: alexander_sm@mail.ru

получена 2 июня 2009

Ключевые слова: целочисленное сбалансирование, трехмерные матрицы, потоки в сетях

Рассматривается задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы, исследуется проблема ее сведения к задаче нахождения максимального потока в сети.

Различные задачи целочисленного сбалансирования возникают в сфере управления, экономики, финансов. В частности, подобная задача ставится при планировании железнодорожных грузоперевозок. Имеется матричный план по отправке вагонов, который группируется по некоторым показателям (например, направление, тип вагона, владелец вагона и т. п.). Данный план составляется на месяц и естественно является целочисленным. Однако вагоны необходимо отправлять ежедневно. При делении на количество дней в месяце план перестает быть целочисленным. Поэтому возникает проблема такого округления основных параметров, чтобы суммирующие показатели не выходили за определенные рамки. Данный план может быть представлен в виде k-мерной матрицы, где k – это число показателей, по которым ведется суммирование.

В работе [1] была рассмотрена задача целочисленного сбалансирования двумерной матрицы, показана сводимость этой задачи к задаче нахождения максимального потока в транспортной сети. При этом по исходной матрице строится сеть, элементам матрицы сопоставляются определенные вершины, значениям этих элементов ставятся в соответствие пропускные способности дуг сети. Кроме того, решение первой задачи индуцирует решение второй и наоборот.

Рассмотрим задачу целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы. Дана вещественная трехмерная матрица A размерности $(n+1)\times(m+1)\times(t+1)$ с неотрицательными элементами a_{ijp}, для которой выполнены условия баланса:

$$a_{000} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} a_{ijp}; \quad a_{i00} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} a_{ijp} \quad (i \in \overline{1,n}); \quad a_{0j0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{t} a_{ijp} \quad (j \in \overline{1,m});$$

$$a_{00p} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ijp} \quad (p \in \overline{1,t}); \quad a_{ij0} = \sum_{p=1}^{t} a_{ijp} \quad (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m});$$

$$a_{i0p} = \sum_{j=1}^{m} a_{ijp} \quad (i \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,t}); \quad a_{0jp} = \sum_{i=1}^{n} a_{ijp} \quad (j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t}).$$

Ищется целочисленная сбалансированная матрица D той же размерности, для которой выполнены условия:

$$d_{ijp} \in \{[a_{ijp}],]a_{ijp}[\} \quad (i \in \overline{0,n},\ j \in \overline{0,m},\ p \in \overline{0,t}); \quad d_{000} = [a_{000} + 0.5];$$

$$d_{000} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp}; \quad d_{i00} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \quad (i \in \overline{1,n}); \quad d_{0j0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \quad (j \in \overline{1,m});$$

$$d_{00p} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ijp} \quad (p \in \overline{1,t}); \quad d_{ij0} = \sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \quad (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m});$$

$$d_{i0p} = \sum_{j=1}^{m} d_{ijp} \quad (i \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,t}); \quad d_{0jp} = \sum_{i=1}^{n} d_{ijp} \quad (j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t}).$$

Постановку задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы можно также дать в виде трехиндексной задачи линейного программирования. Пусть имеется вещественная трехмерная матрица A размерности $(n+1)\times(m+1)\times(t+1)$ с неотрицательными элементами a_{ijp}, для которой выполнены условия баланса. Ищется целочисленная сбалансированная матрица D, для которой выполняются ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} = [a_{000} + 0.5];$$

$$[a_{i00}] \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \le]a_{i00}[\quad (i \in \overline{1,n});$$

$$[a_{0j0}] \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \le]a_{0j0}[\quad (j \in \overline{1,m});$$

$$[a_{00p}] \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ijp} \le]a_{00p}[\quad (p \in \overline{1,t});$$

$$[a_{ij0}] \le \sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \le]a_{ij0}[\quad (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m});$$

$$[a_{i0p}] \le \sum_{j=1}^{m} d_{ijp} \le]a_{i0p}[\quad (i \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,t});$$

$$[a_{0jp}] \leq \sum_{i=1}^{n} d_{ijp} \leq]a_{0jp}[\quad (j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t});$$

$$[a_{ijp}] \leq d_{ijp} \leq]a_{ijp}[\quad (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m},\ p \in \overline{1,t});$$

и принимает минимальное значение критерий

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp}.$$

Обе постановки являются эквивалентными. Действительно, в силу целочисленности элементов матрицы D условие $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} = [a_{000} + 0.5]$ будет эквивалентно условию $d_{000} = [a_{000} + 0.5]$, а двойные неравенства будут эквивалентны условиям $d_{ijp} \in \{[a_{ijp}],]a_{ijp}[\}$ $(i \in \overline{0,n},\ j \in \overline{0,m},\ p \in \overline{0,t})$. Помимо того, выполнение всех ограничений автоматически влечет выполнение условий баланса.

Зададимся вопросом о сводимости рассматриваемой задачи к потоковой. Как и в двумерном случае, нас будет интересовать такое сведение, при котором по исходной трехмерной матрице будет строиться сеть; при этом каждому элементу a_{ijp} матрицы будет соответствовать вершина сети, а пропускные способности дуг будут устанавливаться в зависимости от значений a_{ijp}, причем все пропускные способности дуг должны быть целочисленными. Потребуем также, чтобы некоторое подмножество компонент оптимального решения потоковой задачи образовывало оптимальное решение задачи сбалансирования и задача сбалансирования не имела допустимого решения, если не имеет допустимого решения потоковая задача. Подобное сведение назовем *«естественным»*.

Теорема. *Пусть $n \geq 2$, $m \geq 2$, $p \geq 2$. Тогда для задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы не существует «естественного» сведения к задаче о нахождении наибольшего потока.*

Доказательство. Рассмотрим задачу целочисленного сбалансирования, поставленную в виде задачи линейного программирования. При такой постановке задача целочисленного сбалансирования является многоиндексной задачей распределения ресурсов $W(M)$, рассмотренной в [2, 3]. Многоиндексные задачи линейного программирования указанного вида также были рассмотрены в [4, 5]. Известно (см. [3]), что если задача $W(M)$ сводится к задаче L_1 поиска циркуляции минимальной стоимости в транспортной сети, то матрица системы ограничений задачи $W(M)$ абсолютно унимодулярна (данное утверждение можно обосновать с помощью результатов статьи [6]).

Напомним определение абсолютной унимодулярности. *Абсолютно унимодулярной* называется такая матрица A, любой минор которой равен либо 0, либо ± 1.

Очевидно, что при введенном критерии

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \to \min$$

задача L_1 поиска циркуляции минимальной стоимости и задача о максимальном потоке будут эквивалентны в том смысле, что величина потока по каждой дуге в решениях этих двух задач будет одинакова. Поэтому невозможность сведения задачи целочисленного сбалансирования к задаче нахождения максимального потока будет вытекать из невозможности ее сведения к задаче L_1, причем понятие сводимости, определяемое в [2, 3], будет соответствовать интересующей нас «естественной» сводимости. Следовательно, для доказательства теоремы нам достаточно показать, что матрица системы ограничений для задачи целочисленного сбалансирования не является абсолютно унимодулярной.

Обозначим через E_s единичную подматрицу порядка s, а через O – соответствующую нулевую подматрицу.

Тогда структура матрицы ограничений B для задачи целочисленного сбалансирования будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{array}{cccc|c|cccc|cccc|c|cccc|cccc}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \boxed{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \dots & 1 \\
\hline
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & \boxed{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & \dots & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{E_t} & \dots & \multicolumn{3}{c}{E_{t-1}} & 0 & \multicolumn{4}{c|}{E_t} & \dots & \multicolumn{3}{c}{E_{t-1}} & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \multicolumn{3}{c}{E_{t-1}} \\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & \boxed{1} & & & & & & 0 & 0 & \dots & \boxed{1} & \boxed{0} & & & \\
\hline
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{E_t} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{E_t} & \multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c}{O} \\
\multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c|}{E_t} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c}{O} \\
\multicolumn{4}{c|}{\dots} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{\dots} & \multicolumn{4}{c|}{\dots} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{\dots} & \multicolumn{4}{c}{\dots} \\
\multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{E_t} & \multicolumn{4}{c}{E_t} \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{E_t} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c|}{E_t} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c}{O} \\
\multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c}{O} \\
\multicolumn{4}{c|}{\dots} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{\dots} & \multicolumn{4}{c|}{\dots} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{\dots} & \multicolumn{4}{c}{\dots} \\
\multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{E_t} & \multicolumn{4}{c|}{O} & \dots & \multicolumn{4}{c|}{O} & \multicolumn{4}{c}{E_t} \\
\hline
\multicolumn{22}{c}{E_{nmt}}
\end{array}
$$

Пусть I и J – множества номеров строк и столбцов одинаковой мощности. Тогда через B_{IJ} обозначим минор матрицы B, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами из множеств I и J.

Рассмотрим следующие множества I и J (полагая при этом $n \geq 2$, $m \geq 2$, $p \geq 2$):

$$I = \{n+1,\ n+m+1,\ n+m+t+1\};$$

$$J = \{m+t,\ nmt-t,\ nmt-t+1\}.$$

Выпишем минор B_{IJ}:

$$B_{IJ} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Таким образом, мы получили, что у матрицы B имеется минор, отличный от 0 и от ±1 , то есть матрица B не является абсолютно унимодулярной. Следовательно, утверждение теоремы полностью обосновано.

Замечание 1. Доказательство теоремы можно провести также следующим образом. Сформулируем задачу целочисленного сбалансирования как задачу линейного программирования и выделим из матрицы ее системы ограничений подматрицу, определяемую системой ограничений

$$[a_{i00}] \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \le]a_{i00}[\quad (i \in \overline{1,n});$$

$$[a_{0j0}] \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{t} d_{ijp} \le]a_{0j0}[\quad (j \in \overline{1,m});$$

$$[a_{00p}] \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ijp} \le]a_{00p}[\quad (p \in \overline{1,t}).$$

Данная матрица соответствует задаче $W(M)$, в которой $M = \{\{i,j\},\{i,p\},\{j,p\}\}$. Для такой задачи в работе [2] показана невозможность ее сведения к потоковой задаче, так как не выполняются условия абсолютной унимодулярности. Следовательно, задача целочисленного сбалансирования также не сводится к потоковой.

Замечание 2. Утверждение теоремы справедливо только для $n \ge 2$, $m \ge 2$, $p \ge 2$. Действительно, пусть $n = 1$. Тогда $a_{0jp} = a_{1jp}$ $(j \in \overline{0,m},\ p \in \overline{0,t})$, и задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы становится эквивалентной задаче сбалансирования двумерной матрицы $A' = (a_{0jp})_{j=\overline{0,m},\ p=\overline{0,t}}$, которая сводится к потоковой задаче (см. [1]). То же самое верно для $m = 1$ и для $t = 1$.

Замечание 3. Отсутствие сводимости задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы к задаче о наибольшем потоке в «естественном» смысле не означает отсутствия какого-либо другого сведения. Однако другое сведение очевидно будет сложнее, нежели «естественное», поэтому в работах [7, 8] было предложено обобщение теории потоков Форда–Фалкерсона, названное кратными потоками и задачей о нахождении максимального кратного потока. Показано, что задача о сбалансировании трехмерной матрицы индуцирует задачу о наибольшем кратном потоке так, что решение первой является решением второй. Обратное, однако, неверно: в кратной сети целочисленного сбалансирования может существовать поток, для которого в соответствующей матрице одно из условий $d_{ijp} \in \{[a_{ijp}],]a_{ijp}[\}$ $(i \in \overline{0,n},\ j \in \overline{0,m},\ p \in \overline{0,t})$ будет нарушаться. Поэтому ставится вопрос о нахождении такого максимального кратного потока, в котором определенные дуги (т.н. «основные дуги») будут насыщенными.

Замечание 4. Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы (и соответственно задача нахождения максимального кратного потока кратности 2) предположительно является NP-трудной. В настоящее время ведется работа над обоснованием этого факта.

Список литературы

1. Коршунова Н.М., Рублев В.С. Задача целочисленного сбалансирования матрицы // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 3. Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2000. С. 145 – 150.

2. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 2006. №6. С. 194 – 205.

3. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. №2. С. 57 – 63.

4. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.

5. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.

6. Гофман А.Д., Краскал Д.Б. Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во ИЛ, 1959. С. 325 – 347.

7. Рублев В.С., Смирнов А.В. Целочисленное сбалансирование 3-мерной матрицы плана // Труды VII международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское 4-6 марта 2006 г.). М.: МГУ, 2006. С. 302 – 308.

8. Рублев В.С., Смирнов А.В. Послойный алгоритм целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18-23 июня 2007 г.). М.: МГУ, 2007. С. 351 – 353.

The Problem of Integer-valued Balancing of a Three-dimensional Matrix and Network Model

Smirnov A.V.

Keywords: integer-valued balancing, three-dimensional matrices, flows in networks

The article is devoted to the problem of integer-valued balancing of a three-dimensional matrix. A problem of reducing this problem to the problem of finding a maximum flow in network is explored.

Сведения об авторе:
Смирнов Александр Валерьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант